­­Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БелорусскиЙ государственный университет

информатики и радиоэлектроники

Факультет Компьютерных Систем и Сетей

Кафедра Программного обеспечения информационных технологий

|  |
| --- |
|  |
|  |

Лабораторная работа №2

по дисциплине «Методы оптимизации»

на тему:

Линейная оптимизация

Вариант 8

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил  Студент гр. 751003 |  | Гринчик В.В. |
| Проверила: |  | Филатченкова О.А. |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Минск, 2019

1. Задание на лабораторную работу.

**Задача 1 на тему «Модели распределения ресурсов. Элементы теории двойственности»**

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить экономический смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль:

а) графически,

б) симплекс-методом,

в) на компьютере, например, используя надстройку «Поиск решения».

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план, и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план,

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы,

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи,

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи,

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции, при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

**Задача 2 на тему «Модели оптимизации поставок, размещения и концентрации производства»**

1. Составить математическую модель транспортной задачи;
2. Решить транспортную задачу без учета дополнительных ограничений на перевозки;

а) вручную,

б) на компьютере;

1. Решить транспортную задачу с дополнительными ограничениями на перевозки.
2. Сделать выводы.
3. Ход работы

**Задача 1**

Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции П1 и П2. Для этого используются два ограниченных ресурса — полезная площадь помещений, которая составляет 450 м2, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ресурсы | Затраты ресурсов | | Объем ресурса |
| П1 | П2 |  |
| Полезная площадь, м² | 1,5 | 2 | 450 |
| Рабочее время, чел.-ч | 3 | 2 | 600 |
| Прибыль, ден. ед. | 50 | 65 |  |

1. Математическая модель имеет вид:

**Z (x)= 50x1 + 65x2** 🡪 **max.**

- П1;

- П2;

Z (x)- целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции;

1. Составим математическую модель двойственной задачи:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Коэффициенты целевой функции cj | 50 | 65 | 🡪max |  |
| Переменные | x1 | x2 | Знак неравенств | bi |
| y1 | 1,5 | 2 | ≤ | 450 |
| y2 | 3 | 2 | ≤ | 600 |
|  | x1≥0 | x2≥0 |  |  |

где,

– общая полезная площадь(м²);

– общее количество человеко-часов (трудовых ресурсов);

Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи. yi– это оценки ресурсов. Двойственная задача имеет вид:

**f(y) = 450y1 + 600y2** 🡪 **min** – целевая функция, определяющая суммарную оценку ресурсов.

Неравенства показывают, что оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы соответствующей продукции не меньше, чем прибыль от выпуска единицы этой продукци.

**Графический метод решения**



Т.к. прямая сдвинутая параллельным переносом пересекает область в точке пересечения прямых, то её координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

=450

=600  
Решив систему уравнений, получим: x1 = 100, x2 = 150

Z(X) = 50\*100 + 65\*150 = 14750

**Симплекс-метод**

Математичексую модель преобразовываем к канонической форме:

**Z (x)= 50x1+65x2+0x3+0x4**🡪 **max.**

Значение целевой функции для опорного плана вычисляется как Δ0 = cб\*b, где cб – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, b – вектор значений базисных переменных.

Оценки свободных переменных вычисляются как Δj = cб\*Aj-cj, где Аj – вектор-столбец коэффициентов при переменной xj .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № итерации | БП | cб | B | x1 | x2 | x3 | x4 | Симплексные отношения |
| 50 | 65 | 0 | 0 |
| 0 | x3 | 0 | 450 | 1,5 | **2** | 1 | 0 | 450/2=225 |
| x4 | 0 | 600 | 3 | 2 | 0 | 1 | 600/2=300 |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 0 | -50 | -65 | 0 | 0 |
| 1 | x2 | 65 | 225 | 0,75 | 1 | 1/2 | 0 | 225/0.75=300 |
| x4 | 0 | 150 | 1,5 | 0 | -1 | 1 | 15/0.75=100 |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 14625 | -1,25 | 0 | 32,5 | 0 |
| 2 | x2 | 65 | 150 | 0 | 1 | 1 | -0.5 | - |
| x1 | 50 | 100 | 1 | 0 | -0.667 | 0.667 | - |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 14750 | 0 | 0 | 31.667 | 0.833 |

После второй итерации все оценки неотрицательны, следовательно, оптимальный план найден.

Вектор **x\*** (x1, x2, x3, x4) = (100, 150, 0, 0), которому соответствует прибыль Z\* = 14750. Переменные x3 и x4 равны нулю (в базис они не входят), следовательно, первый и второй ресурсы использованы полностью.

**Функция “Поиск решения”**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x1 | x2 |  |  |  |
| Результат | 100 | 150 |  |  |  |
| Полезная площадь, м² | 1,5 | 2 | 450 | <= | 450 |
| Рабочее время, чел.-ч | 3 | 2 | 600 | <= | 600 |
|  | Целевая функция |  |  |  |  |
| Прибыль, ден. ед. | 50 | 65 | = | 14750 |  |

В результате использования функции “Поиск решения” в Excel получаем оптимальное решение задачи. Необходимо произвести 100 единиц П1 и 150 единиц П2 для овощей для получения максимальной прибыли, которая составляет 14750 ден.ед.

**Анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач.**

а) Исходя из отчетов, получаем оптимальный план реализации товаров культур Xopt=(100; 150) и максимальное значение целевой функции Z(Xopt)=14750.

б) Дефицитными ресурсами являются и площадь помещений и человеко-часы.

в) Согласно отчету по устойчивости получаем оптимальное решение двойственной задачи Yopt=(31.6667; 0.833; 0; 0).

г) Наиболее дефицитным ресурсом является полезная площадь, человеко часы являются мене дефицитными.

д) Исходя из отчета об устойчивости получаем , что интервал устойчивости для полезной площади – (300; 600), для человеко-часов– (300; 750) .

**Решение двойственной задачи**

Математическая модель прямой задачи:

**Z (x)= 50x1+65x2+0x3+0x4**🡪 **max.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | 50 | 65 |  | Max |
| Y1 | 1,5 | 2 | ≤ | 450 |
| 3 | 2 | 600 |

Составим двойственную задачу. Транспонируем таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| F | 450 | 600 |  | min |
|  | 1,5 | 3 | ≥ | 50 |
|  | 2 | 2 | 65 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № итерации | БП | cб | B | x1 | x2 | x3 | x4 | Симплексные отношения |
| 50 | 65 | 0 | 0 |
| 0 | x3 | 0 | 450 | 1,5 | **2** | 1 | 0 | 450/2=225 |
| x4 | 0 | 600 | 3 | 2 | 0 | 1 | 600/2=300 |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 0 | -50 | -65 | 0 | 0 |
| 1 | x2 | 65 | 225 | 0,75 | 1 | 1/2 | 0 | 225/0.75=300 |
| x4 | 0 | 150 | 1,5 | 0 | -1 | 1 | 15/0.75=100 |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 14625 | -1,25 | 0 | 32,5 | 0 |
| 2 | x2 | 65 | 150 | 0 | 1 | 1 | -0.5 | - |
| x1 | 50 | 100 | 1 | 0 | -0.667 | 0.667 | - |
| Оценки | | Δ0 | Δ1 | Δ2 | Δ3 | Δ4 |  |
| 14750 | 0 | 0 | 31.667 | 0.833 |

Вектор **x\*** (x1, x2, x3, x4) = (100, 150, 0, 0), которому соответствует прибыль Z\* = 14750.

min f = max Z = 14750.

450\*31.667+600\*0.833=50\*100+65\*150=14750

При оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

При изменении рабочей площади на 1м2 в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 31.667 ден.ед., при изменении количества человеко часов на 1 в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 0.833 ден.ед.

**Задача 2**

Определить оптимальный план перевозок транспортной задачи, заданной транспортной таблицей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x210, x120 | Получатели | | | |
| Поставщики | **40** | **20** | **10** | **20** |
| **40** | 7 | 6 | 5 | 11 |
| **20** | 3 | 4 | 2 | 2 |
| **10** | 9 | 10 | 3 | 15 |
| **10** | 1 | 5 | 1 | 3 |



- объем перевозки от i-ого поставщика j-ому покупателю

- стоимость перевозки от i-ого поставщика j-ому покупателю

- i-ый поставщик

- j-ый потребитель

 - общие затраты на перевозку. Функция должна быть минимальна.

Z = 7 x11 + 6 x12 + 5 x13 + 11 x14

+ 3 x21 + 4 x22 +2 x23 +2 x24

+ 9 x31 + 10 x32 + 3 x33 + 15 x34

+1 x41 + 5 x42 + 1 x43 + 3 x44.

Поскольку необходимый получателям объём превышает общий доступный объём у поставщиков на 10 ед., введем фиктивного поставщика с таким объемом груза. Математическая модель будет выглядеть следующим образом:

**Решение задачи без учета дополнительных ограничений на перевозки**

Используем *метод минимального элемента*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Получатели | | | |
| Поставщики | **40** | **20** | **10** | **20** |
| **40** | 7[20] | 6[20] | 5 | 11 |
| **20** | 3 | 4 | 2 | 2[20] |
| **10** | 9 | 10 | 3[10] | 15 |
| **10** | 1[10] | 5 | 1 | 3 |
| **10** | 0[10] | 0 | 0 | 0 |

Используем *метод потенциалов*.

Каждому поставщику ставятся в соответствие потенциалы ui, а каждому получателю - vj, удовлетворяющие условию **ui+ vj = cij** в тех клетках таблицы, которые вошли в опорный план.

Количество таких ячеек равно 6, в то время как оно должно равняться

m+n-1=8, где m и n - количество строк и столбцов соответственно. Необходимо заполнить еще две клетки нулями так, чтобы не было циклов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **40** | **20** | **10** | **20** |
| **40** | 7[20] | 6[20] | 5 | 11 |
| **20** | 3 | 4[0] | 2 | 2[20] |
| **10** | 9 | 10 | 3[10] | 15 |
| **10** | 1[10] | 5 | 1 | 3 |
| **10** | 0[10] | 0 | 0 | 0 |

F(x) = 10\*1 + 7\*20+6\*20+3\*10+2\*20+0\*10= 340 ден. ед.

Принимаем u2 = 0 и высчитываем остальные потенциалы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1 | v2 | v3 | v4 |
| u1 | 7 | 6 | 5 | 11 |
| u2 | 3 | 4 | 2 | 2 |
| u3 | 9 | 10 | 3 | 15 |
| u4 | 1 | 5 | 1 | 3 |
| u5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Далее для всех пустых клеток проверяем выполнение условия: cij >=vj+ui.

Нужно выбрать для включения в базис ту клетку, для которой абсолютное значение отрицательной оценки cij-(vj+ui)<0 является наибольшим и занести в нее максимально возможную величину перевозимого груза.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | v1 | v2 | v3 | v4 |
| 5 | 4 | 5 | 2 |
| u1 | 2 | 7 | 6 | 5(-2) | 11(7) |
| u2 | 0 | 3(-2) | 4 | 2(-3) | 2 |
| u3 | -2 | 9(6) | 10(8) | 3 | 15(15) |
| u4 | -4 | 1 | 5(0) | 1(0) | 3(5) |
| u5 | -5 | 0 | 0(1) | 0 | 0(3) |
| ( ) - оценки | | | | | |

Перспективной для ввода в базис является клетка (2, 3). В цикле (2, 3) - (3, 3) - (5, 3) - (5, 1) - (1, 1) - (1, 2) - (2, 2) заполненных клеток расставляем знаки.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | v1 | v2 | v3 | v4 |
| 5 | 4 | 5 | 2 |
| u1 | 2 | 7+ | 6- | 5 | 11 |
| u2 | 0 | 3 | 4+ | 2(-3)+ | 2 |
| u3 | -2 | 9 | 10 | 3- | 15 |
| u4 | -4 | 1 | 5(0) | 1(0) | 3 |
| u5 | -5 | 0- | 0 | 0+ | 0 |

Минимальным значением, стоящим в неиспользованных клетках, является 0. Это означает что результат с этим опорным планом не может быть улучшен, так как следующие итерации всего лишь будут пересчитывать потенциалы, но не изменят значения в ячейках.

Значение целевой функции Z = 10\*1 + 7\*20+6\*20+3\*10+2\*20+0\*10 = 340.

**Расчёт на компьютере с помощью функции “Поиск решения”**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Без ограничений | | | | | |
| 20 | 20 | 0 | 0 | 40 | 40 |
| 0 | 0 | 0 | 20 | 20 | 20 |
| 0 | 0 | 10 | 0 | 10 | 10 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 |
| 40 | 20 | 10 | 20 | 340 |  |
| 40 | 20 | 10 | 20 |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| С ограничениями | | | | | |
| 20 | 20 | 0 | 0 | 40 | 40 |
| 0 | 0 | 0 | 20 | 20 | 20 |
| 0 | 0 | 10 | 0 | 10 | 10 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 10 | 10 |
| 40 | 20 | 10 | 20 | 340 |  |
| 40 | 20 | 10 | 20 |  |  |

Вывод:

В результате решения транспортной задачи двумя способами (на компьютере и вручную) значение целевой функции одинаково и равно 340. Это число обозначает суммарные расходы на перевозку всего товара всем покупателям. Для решения данной задачи вручную использовались методы минимального элемента и метод потенциалов, для решения на компьютере – встроенная функция «Поиск решения».